

COURS

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty \iff \forall A < 0, \exists \varepsilon > 0, x \in]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[\cap \mathcal{D}_f \implies f(x) < A$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, x \in]B; +\infty[\cap \mathcal{D}_f \implies f(x) \in]-1 - \varepsilon; -1 + \varepsilon[$$

CORRIGÉ 1 $\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{x(3+\frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{3+\frac{2}{x}} = \frac{\pi}{3}$ par quotient

De plus, $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos t = \frac{1}{2}$ par continuité de la fonction cos en $\frac{\pi}{3}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{3x+2}\right) = \frac{1}{2}$ par composition de limites.

Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote (horizontale) à la courbe.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0^-$

$\textcircled{2}$

x	$-\infty$	2
$x - 2$	$-$	0

On en déduit, d'une part que $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\cos(x-2)} = 1$ par continuité de la fonction cos en 0, et d'autre part que $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)\cos(x-2)} = -\infty$ par quotient.

Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $x = 2$ est asymptote (verticale) à la courbe.

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} 4\sqrt{x} + 2 - x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{4}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} - 1 \right) = -\infty \text{ par produit.}$$

$$\textcircled{4} \text{ Déterminons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + \sin(x)}{x^2 + 1}.$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^*, \frac{-2x^2 + \sin(x)}{x^2 + 1} = \frac{-2 + \frac{\sin x}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ donc } -2 - \frac{1}{x^2} \leq -2 + \frac{\sin x}{x^2} \leq -2 + \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 - \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + \frac{1}{x^2} = -2,$$

$$\text{donc le théorème des gendarmes permet d'affirmer que } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + \frac{\sin x}{x^2} = -2$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 \text{ par somme.}$$

$$\text{Donc par quotient des deux limites précédentes, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{\sin x}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = -2.$$

Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $y = -2$ est asymptote (horizontale) à la courbe.

CORRIGÉ 2 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et telle que pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

$$\textcircled{1} \quad (a) \quad u_1 = \frac{3 \times \frac{1}{2}}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

$$u_2 = \frac{3 \times \frac{3}{4}}{1 + 2 \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{9}{10}$$

(b) Pour tout entier naturel n , posons $\mathcal{P}(n)$: « $0 < u_n$ ».

Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $u_0 > 0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

L'hypothèse de récurrence ($u_n > 0$) donne $3u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} > 0$.

On a montré que $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) i. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$.
 f est le quotient de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+ et dont le dénominateur est non nul, donc f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et :

$$f'(x) = \frac{3(1+2x) - 2 \times 3x}{(1+2x)^2} = \frac{3}{(1+2x)^2} > 0.$$
Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

ii. Pour tout entier naturel n , posons $\mathcal{P}(n)$: « $u_n < 1$ ».

Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $u_0 < 1$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $u_n < 1$.

On a donc (par $\textcircled{1}b$) $0 < u_n < 1$, puis par stricte croissance de f sur \mathbb{R}_+ , on a $f(u_n) < f(1)$.

Or $f(1) = 1$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, donc $u_{n+1} < 1$.

On a montré que $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\textcircled{2}$ (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - \frac{u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \frac{3u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_n > 0$ donc $2u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 0$.

$u_n < 1$ donc $1 - 2u_n > 0$.

On en déduit que $\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} > 0$ soit $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire que (u_n) est une suite strictement croissante.

(c) (u_n) est majorée (par 1) et est strictement croissante, donc converge (théorème de convergence monotone).